



**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa locală – clasa a V – a**  
**Vaslui, 14 februarie 2026**  
**Barem de evaluare și notare**

*Fiecare problemă se punctează cu 22,5 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.  
Punctajul maxim este de 100 de puncte.*

**Problema 1.**

- a) Dacă  $A = (2^{2026} + 2^{2025}) \cdot (2^{2025} + 2^{2024}) \cdot (2^{2024} + 2^{2023})$ , arătați că restul împărțirii lui  $A$  la 27 este 0.  
b) Aflați numărul natural  $x$  pentru care  $2025^x + 2026 \cdot x = 2027^{2028} \cdot x + 1$ .

*Gazeta Matematică, nr. 10/2025*

**Soluție și barem:**

a)  $A = 2^{2025}(2 + 1) \cdot 2^{2024}(2 + 1) \cdot 2^{2023}(2 + 1)$ ..... 4p

$A = 2^{6072} \cdot 27$ .....3,5p

Cum  $A$  se scrie ca un produs în care unul din factori este 27, rezultă că restul împărțirii lui  $A$  la 27 este 0.....2p

b)  $2025^x + 2026 \cdot x = 2027^{2028} \cdot x + 1 \Leftrightarrow 2025^x - 1 = x(2027^{2028} - 2026)$ .....2p

Pentru  $x = 0$  obținem  $2025^0 - 1 = 0 \cdot (2027^{2028} - 2026) \Leftrightarrow 1 - 1 = 0$  (adevărat).....2p

Pentru  $x \neq 0$ :

$u(2025^x - 1) = 4$ .....2p

$u(2027^{2028}) = 1$ .....2p

$u(2027^{2028} - 2026) = 5$ .....1p

Ultima cifră a lui  $x(2027^{2028} - 2026)$  poate fi 0 sau 5.....2p

Deci  $u(2025^x - 1) \neq u(x(2027^{2028} - 2026))$  și de aici obținem că egalitatea nu poate avea loc pentru  $x \neq 0$ ...1p

Prin urmare, egalitatea se verifică doar pentru  $x = 0$ .....1p

**Problema 2.**

a) Determinați cifrele  $a$  și  $b$  pentru care este adevărată egalitatea:

$$\overline{a1} + \overline{a2} + \overline{a3} + \overline{a4} + \overline{a5} = \overline{bb} \cdot a.$$

b) Desenați pe foaia de concurs careul de mai jos.


Completați fiecare căsuță a careului cu numere naturale diferite. Aflați produsul acestor numere știind că suma lor este egală cu 300.

**Soluție și barem:**

a)  $\overline{a1} + \overline{a2} + \overline{a3} + \overline{a4} + \overline{a5} = \overline{bb} \cdot a \Leftrightarrow 50a + 15 = 11b \cdot a$  .....4p

$u(50a + 15) = 5$  .....2p

$50a + 15 = 11b \cdot a \Rightarrow u(11b \cdot a) = 5$  .....2p

Obținem  $a = 5$  sau  $b = 5$  .....3p

Pentru  $a = 5$  obținem  $265 = 55b$ , ceea ce nu convine pentru că  $265:55 = 4$  rest 45 .....2p

Pentru  $b = 5$  obținem  $50a + 15 = 55a$ , de unde  $a = 3$  .....2p

b) Dacă careul ar fi completat doar cu numere nenule, atunci suma celor 25 de numere din careu ar fi cel puțin egală cu  $1 + 2 + 3 + \dots + 25 = 325$ , fapt ce nu convine, pentru că suma numerelor trebuie să fie egală cu 300. ....3p

Deci în careu îl vom regăsi și pe 0, prin urmare produsul numerelor este egal cu 0. ....2p

Completarea careului în mod corect .....2,5p

*Notă: Fără justificarea folosirii numărului 0 în completarea careului, se vor acorda doar 5 puncte din 8.*

**Problema 3.** Dacă  $x$  este numărul numerelor naturale de 4 cifre cu produsul cifrelor egal cu 0 și  $y$  este numărul numerelor naturale de 4 cifre cu produsul cifrelor nenule egal cu 27, determinați ultima cifră a lui  $y^x$ .

**Soluție și barem:**

Numărul numerelor naturale de 4 cifre este egal cu 9000. ....2p

Numărul numerelor naturale de 4 cifre nenule este egal cu  $9^4 = 6561$ . ....3p

Deci  $x = 9000 - 6561 = 2439$ . ....2p

$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$  sau  $27 = 3 \cdot 9$  .....2p

Pentru a forma un număr de 4 cifre cu produsul cifrelor nenule egal cu 27 avem următoarele posibilități:

1) În scrierea lui  $\overline{abcd}$ , cifra 3 apare de 3 ori și cifra 0 apare o singură dată, existând 3 astfel de numere: 3033, 3303, 3330. ....2p



- 2) În scrierea lui  $\overline{abcd}$ , cifra 3 apare de 3 ori și cifra 1 apare o singură dată, existând 4 astfel de numere: 1333, 3133, 3313, 3331. ....2p
- 3) În scrierea lui  $\overline{abcd}$ , cifrele 3 și 9 apar o singură dată și cifra 0 apare de două ori, existând 6 astfel de numere: 3009, 3090, 3900, 9003, 9030, 9300. ....2p
- 4) În scrierea lui  $\overline{abcd}$ , cifrele 3 și 9 apar o singură dată și cifra 1 apare de două ori, existând 12 astfel de numere: 1139, 1193, 1319, 1391, 1913, 1931, 3119, 3191, 3911, 9113, 9131, 9311. ....2p
- 5)  $\overline{abcd}$  este format din cifre distincte, cifrele folosite fiind 0, 1, 3, 9. Există  $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$  astfel de numere: 1039, 1093, 1309, 1390, 1903, 1930, 3019, 3091, 3109, 3190, 3901, 3910, 9013, 9031, 9103, 9130, 9301, 9310 .....2p
- Deci  $y = 3 + 4 + 6 + 12 + 18 = 43$ . ....1p
- $u(y^x) = u(43^{2439}) = 7$ .....2,5p

**Problema 4.** Să se determine numerele naturale de forma  $\overline{bab}$  care se împart exact la 11, știind că are loc egalitatea  $a^2 + b^b = \overline{ab}$ .

**Soluție și barem:**

- $a^2 + b^b = \overline{ab} \Rightarrow b^b = \overline{ab} - a^2 \Rightarrow b^b \leq 98 \Rightarrow b \leq 3$ .....5p
- Pentru  $b = 1$  obținem  $a^2 + 1 = \overline{a1} \Rightarrow a^2 = \overline{a0}$ , fapt ce este imposibil pentru că nu există pătrate perfecte de două cifre cu ultima cifră egală cu 0, pătratele perfecte de două cifre fiind 16, 25, 36, 49, 64, 81. ....3p
- Pentru  $b = 2$  obținem  $a^2 + 4 = \overline{a2} \Rightarrow a^2 = \overline{a2} - 4$ .....1p
- $u(\overline{a2} - 4) = 8 \Rightarrow u(a^2) = 8$  (imposibil).....2p
- Pentru  $b = 3$  obținem  $a^2 + 27 = \overline{a3} \Rightarrow a^2 = \overline{a3} - 27$ .....1p
- $u(\overline{a3} - 27) = 6 \Rightarrow u(a^2) = 6$ , de unde obținem  $a = 4$  sau  $a = 6$ . ....4p
- Dacă  $a = 4$  obținem  $4^2 = 16 = 43 - 27$  (adevărat) și  $343: 11 = 31$  rest 2 (nu convine) .....2p
- Dacă  $a = 6$  obținem  $6^2 = 36 = 63 - 27$  (adevărat) și  $363: 11 = 33$  (convine) .....2p
- Deci  $\overline{bab} = 363$  .....2,5p